Zentrale Prüfung 2015
NRW – Mathematik

Prüfungsteil 1

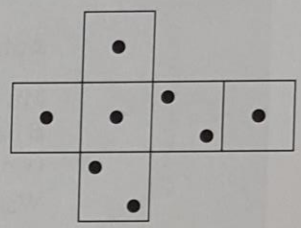
Aufgabe 1

Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

10^8; 2^{-1}; $\frac{1}{3}$; 10^{-1}; 2^8

Aufgabe 2

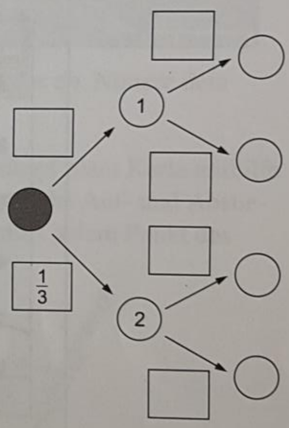
Claude wirft mit einem besonderen Spielwürfel.
Hier siehst du das Netz des Würfels.



a) Begründe, dass die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl „2" bei einem Wurf mit dem Würfel $\frac{1}{3}$ beträgt.

b) Der Würfel wird zweimal geworfen.
Ergänze in dem Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und Ereignisse.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, zweimal eine „2" zu würfeln.



Aufgabe 3

Eine zylinderförmige Getränkedose enthält 0,33 ℓ Mineralwasser und hat einen Durchmesser von 67 mm. Wie hoch ist die Getränkedose mindestens?

Aufgabe 4

Löse folgendes Gleichungssystem mit einem geeigneten Verfahren:

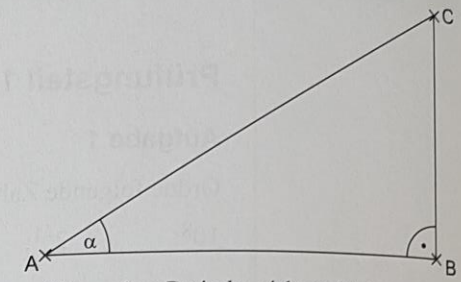
(I) $2x + y = 2$
(II) $x - 0{,}5y = 2$

Aufgabe 5

Bei einem Dreieck ABC ist die Seite $\overline{AB}$ 4 cm lang (vgl. Abbildung rechts). Der Winkel α bei dem Punkt A ist 40° groß.

a) Bestimme rechnerisch die Länge der Seite $\overline{AC}$.

b) Bestimme rechnerisch die Länge der Seite $\overline{BC}$.

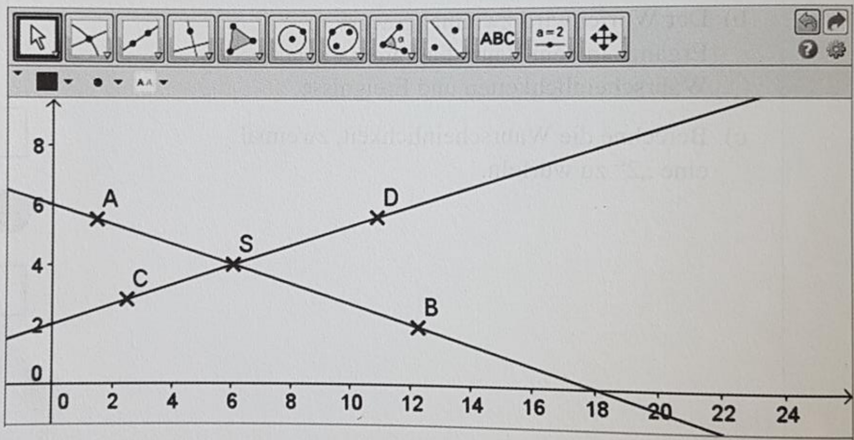


Skizze eines Dreiecks, nicht maßstabsgetreu

Aufgabe 6

Mit einer dynamischen Geometriesoftware werden zwei Geraden durch die Punkte A und B bzw. C und D erzeugt. Die beiden Geraden haben den gemeinsamen Schnittpunkt S (vgl. Abbildung unten).

Was verändert sich, wenn du den Punkt A auf die Koordinaten (2|8) verschiebst? Begründe.



Bildschirmfoto aus einer dynamischen Geometriesoftware

Prüfungsteil 2

Aufgabe 1: Wandern und Routenplanung

Karla macht Wanderurlaub am Bodensee. Sie plant eine Wanderung in zwei Etappen von Lindau bis Bregenz und von Bregenz zum Brüggelekopf.

Auf der Karte ist die erste Etappe der Wanderung zu sehen: Die Route von Lindau bis nach Bregenz.

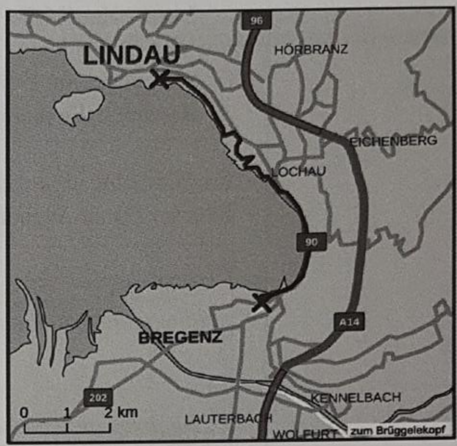


Abbildung 1:
Ausschnitt der Wanderkarte.
Die erste Etappe startet in Lindau und führt bis zur markierten Stelle in Bregenz.

a) Schätze anhand der Karte die Länge der Strecke der ersten Etappe ab. Notiere dein Vorgehen.

Die zweite Etappe der Wanderung von Bregenz bis zum Brüggelekopf plant Karla mithilfe eines *Höhenprofils* (siehe Abbildung unten). Sie möchte wissen, welche Auf- und Abstiege sie bei ihrer Wanderung bewältigen muss. Das Höhenprofil ordnet jedem Punkt des Weges auf der Karte seine Höhe über dem Meeresspiegel zu.

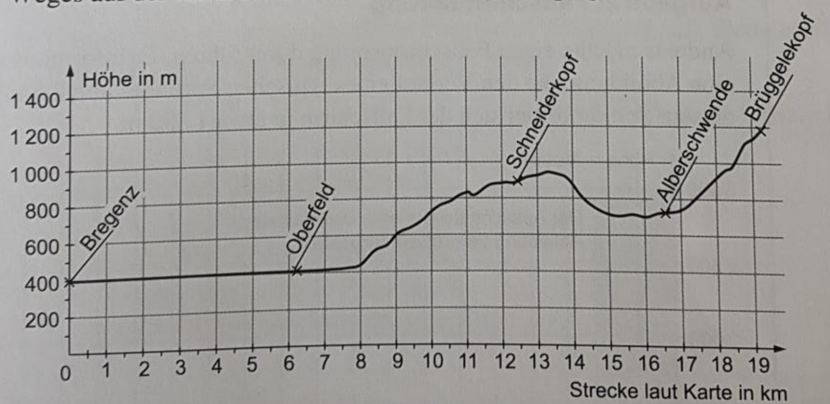


Abbildung 2: Höhenprofil von Bregenz bis zum Brüggelekopf

Karlas Höhenprofil zeigt von Bregenz aus die *Strecke laut Karte in km* und die jeweilige *Höhe in m* an. Der tatsächlich zurückgelegte Weg kann über die Länge des Höhenprofils bestimmt werden.

b) In Oberfeld will Karla ihre erste Pause machen. Entnimm der Abbildung 2 die Länge der Strecke von Bregenz bis Oberfeld.

c) Auf wie viele Meter genau kannst du die Höhe eines Ortes aus der Abbildung 2 ablesen?

d) Das letzte Stück des Weges zwischen Alberschwende und dem Brüggelekopf ist ziemlich steil.
Wie viele Meter liegt der Brüggelekopf höher als der Ort Alberschwende?

Auf den letzten 2 km vor dem Brüggelekopf müssen noch 400 m Höhe überwunden werden.

e) Karlas kleiner Bruder behauptet: „Die Strecke, die du wandern musst, ist länger als 2 km.“ Hat Karlas kleiner Bruder recht? Begründe deine Entscheidung.

f) Steigungen im Gelände werden üblicherweise in Prozent angegeben.
Berechne die ungefähre Steigung in Prozent für die letzten 2 km.

Karla möchte abschätzen, wie lange sie ohne Pausen unterwegs sein wird. Sie findet im Internet für die Wanderung von Bregenz zum Brüggelekopf die folgenden Informationen:

Länge der Strecke:	19,2 km
Höhenunterschiede insgesamt:	
Aufstieg:	1 019 m
Abstieg:	251 m

„Du gehst auf einer ebenen Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von ca. 4,2 km pro Stunde. Sowohl beim Aufstieg als auch beim Abstieg benötigst du mehr Zeit: Du rechnest für jeden Höhenunterschied von 300 m eine zusätzliche Stunde dazu.“

g) Berechne mithilfe der Informationen die ungefähre Wanderzeit (ohne Pausen) von Bregenz bis zum Brüggelekopf.

Aufgabe 2: Fallschirmsprung

Andreas möchte einen Fallschirmsprung durchführen. Er informiert sich vorher und findet eine Abbildung, die den Verlauf eines typischen Sprunges annähernd beschreibt. Bei diesem Sprung öffnet sich der Fallschirm in etwa 1 500 m.

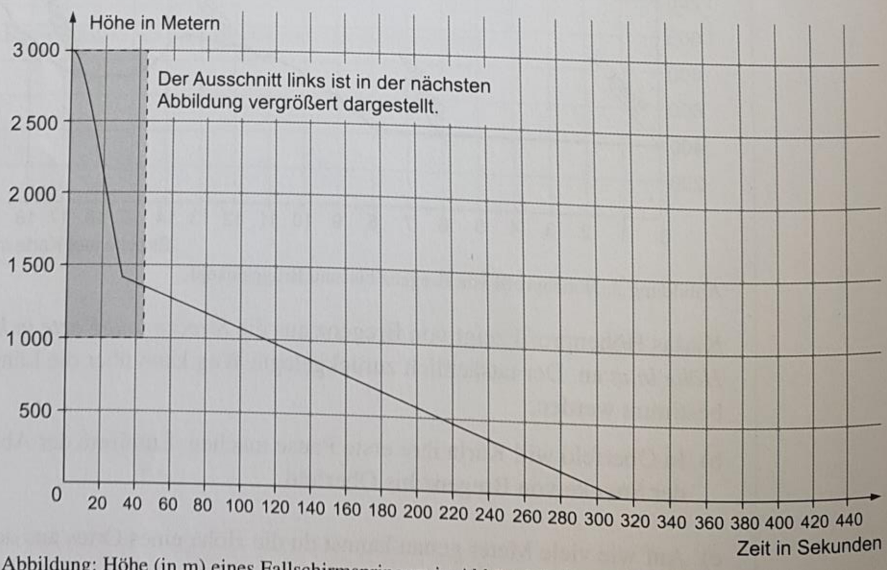


Abbildung: Höhe (in m) eines Fallschirmspringers in Abhängigkeit von der Zeit (in s)

a) Wie lange dauert der Sprung ungefähr? Gib die Zeitdauer in Minuten an.

b) Andreas überlegt, wie sich der Sprung verändert, wenn er den Fallschirm bereits in 2 000 m Höhe öffnet.
Skizziere den Verlauf des geänderten Fallschirmsprungs im vorhandenen Koordinatensystem.

In einer weiteren Abbildung ist ein Ausschnitt des vorher abgebildeten Sprunges detaillierter dargestellt. Darin sind nur die ersten 45 Sekunden des Sprunges in der Höhe von 3 000 m bis 1 000 m dargestellt.

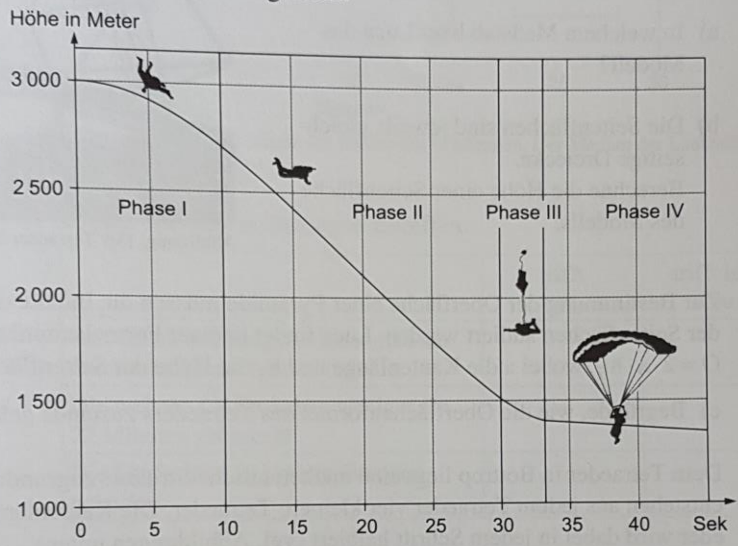


Abbildung: Ausschnitt mit vier Flugphasen (I, II, III, IV)

c) Welche Aussage passt zu welcher Flugphase? Mache für jede Phase ein Kreuz. Eine Aussage kann auch zu mehreren Phasen passen.

	Phase I	Phase II	Phase III	Phase IV
Der Springer fällt in dieser Phase immer schneller: Die Geschwindigkeit steigt.				
Der Springer fällt in dieser Phase immer langsamer: Die Geschwindigkeit sinkt.				
Der Springer fällt in dieser Phase immer gleich schnell: Die Geschwindigkeit bleibt gleich.				

Der Springer ist am Ende der Phase I nach 10 Sekunden in 2 700 Metern Höhe.

Die Höhe des Springers wird in der Phase I durch folgende Funktion beschrieben:
$h(t) = 3\,000 - 3t^2$
t ist die Zeit in Sekunden, h(t) gibt die Höhe in Metern an.

d) Begründe, dass die Funktion h(t) den Graphen aus Phase I beschreibt.

e) Berechne, wie viele Sekunden der Springer vom Absprung aus braucht, bis er 100 m gefallen ist.

f) Bestimme die Geschwindigkeit des Springers in der Phase II in $\frac{m}{s}$.

Aufgabe 3: Tetraeder in Bottrop

Der „Tetraeder" ist ein begehbarer Aussichtsturm in Bottrop. Die äußeren Kanten des Stahlgerüstes des Tetraeders haben jeweils die Länge von ca. 60 m (vgl. Abbildung rechts).

Luca baut ein verkleinertes Modell des Tetraeders mit der Kantenlänge von 60 cm aus Holzstäben.

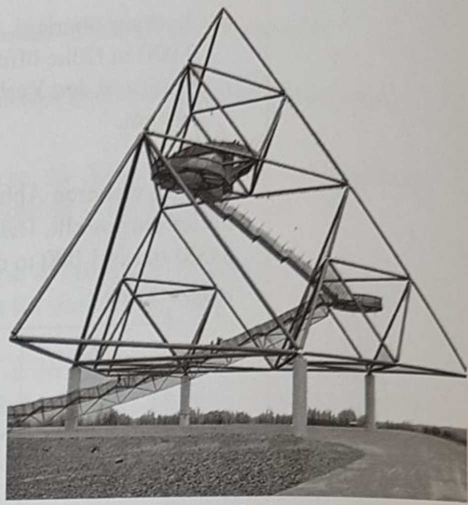


Abbildung: Der Tetraeder in Bottrop

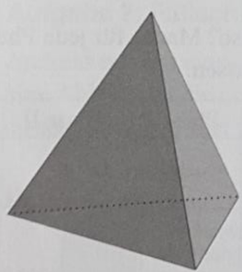
a) In welchem Maßstab baut Luca das Modell?

b) Die Seitenflächen sind jeweils gleichseitige Dreiecke.
Berechne die Höhe einer Seitenfläche des Modells.

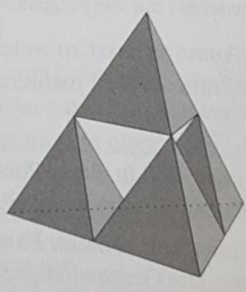
Zur Bestimmung der Oberfläche einer Pyramide müssen die Inhalte der Grundfläche und der Seitenflächen addiert werden. Luca findet in einer Formelsammlung jedoch: $O = 2 \cdot a \cdot h_S$, wobei a die Kantenlänge und h_S die Höhe der Seitenfläche bezeichnen.

c) Begründe, wie die Oberflächenformel des Tetraeders zustande gekommen ist.

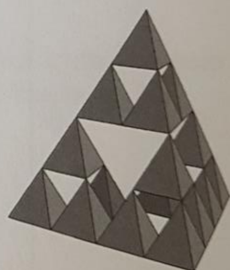
Dem Tetraeder in Bottrop liegt eine mathematische Struktur zugrunde. In jedem Schritt entstehen aus jedem Tetraeder vier kleinere Tetraeder. Die Kantenlänge der neuen Tetraeder wird dabei in jedem Schritt halbiert (vgl. Abbildungen unten).



Schritt 0 (Ausgangsfigur)



Schritt 1



Schritt 2

d) Ergänze die folgende Tabelle:

	Schritt 0	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3
Anzahl der Tetraeder	1	4		64
Kantenlänge eines Tetraeders (cm)	60	30		

e) Gib einen Term an, mit dem du die Anzahl der Tetraeder für jeden beliebigen Schritt s berechnen kannst.

Luca fährt mit seiner Klasse zum Tetraeder nach Bottrop, um dort am „Tetraeder Treppenlauf“ teilzunehmen. Bei dem 5 km langen Lauf müssen die Jugendlichen 387 Treppenstufen und 128 Höhenmeter überwinden.

Die Klasse teilt sich in zwei Gruppen (A und B). Die Veranstalter veröffentlichen von jedem Teilnehmer die Ergebnisse. Luca stellt für die Gruppe A und die Gruppe B die Ergebnisse in zwei Boxplots dar.

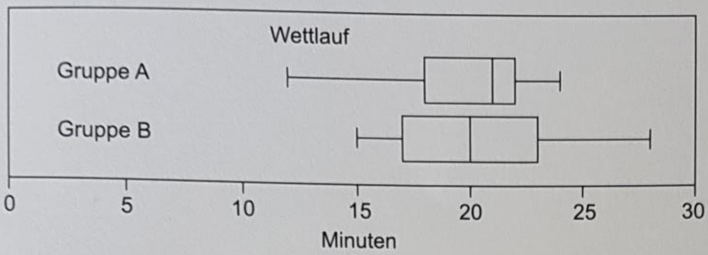


Abbildung: Die Boxplots zeigen die Laufzeiten in Minuten. Der Median der Laufzeiten aus Gruppe B beträgt ca. 20 Minuten.

f) Kreuze an, welche Aussagen zutreffen:

	trifft zu	trifft nicht zu	nicht entscheidbar
Aus einem der Boxplots kann man die durchschnittliche Laufzeit ablesen.			
Die meisten Läufer haben weniger als 22 Minuten gebraucht.			
Die Läufer sind in kleinen Gruppen gelaufen.			

Leider hat sich die Klasse vor dem Lauf nicht darauf geeinigt, wie die Siegergruppe ermittelt wird.

g) Gib ein Argument anhand der Boxplots dafür an, dass die Gruppe A gewonnen hat.

h) Gib ein Argument anhand der Boxplots dafür an, dass die Gruppe B gewonnen hat.